

Développement : Équation de SYLVESTER

ANALYSE & PROBABILITÉS
ALGÈBRE & GÉOMÉTRIE

Référence : [GX] GOURDON X., *Les maths en tête - Analyse, 2^{ème} édition*, ellipses, 2008, p390

Pour les leçons :

- 154 : Exemples de décompositions de matrices. Applications.
- 155 : Exponentielle de matrices. Applications.
- 156 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
- 162 : Systèmes d'équations linéaires : opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.
- 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
- 221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (en particulier sous-multiplicative), et on note $\|\cdot\|_\infty$ la norme infinie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Lemme 1.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vérifient :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0.$$

Alors, il existe $\alpha > 0$ et $K > 0$ tels que :

$$\forall t \geq 0 \quad \|e^{tA}\| \leq K e^{-\alpha t}.$$

PREUVE : D'après le théorème de décomposition de DUNFORD, il existe $D, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec D diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, N nilpotente commutant avec D , et telles que $A = D + N$.

L'idée est de majorer les e^{tD} et e^{tN} (ce qui est plus simple que e^{tA} puisqu'on connaît mieux D et N , qui commutent).

Soit $P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $D = P^{-1} D_1 P$, avec $D_1 = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{tD_1} = \operatorname{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})$.

Donc $\|e^{tD_1}\|_\infty = \sup_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} |e^{t\lambda_i}| = e^{-ct}$ avec $c = -\sup_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$ par hypothèse.

Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes. Il existe donc $K_1 > 0$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \|e^{tD_1}\| \leq K_1 e^{-ct}.$$

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \|e^{tD}\| &= \|P^{-1} e^{tD_1} P\| \\ &\leq K_1 \|P^{-1}\| \|P\| e^{-ct}. \end{aligned}$$

Comme N est nilpotente, on a en outre :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e^{tN} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} N^k,$$

donc :

$$\|e^{tN}\| = o_{t \rightarrow +\infty}(t^n).$$

Enfin, comme D et N commutent :

$$\begin{aligned} \|e^{tA}\| &= \|e^{tD+tN}\| \\ &\leq \|e^{tD}\| \|e^{tN}\| \\ &= o_{t \rightarrow +\infty}(e^{-ct} t^n) \\ &= o_{t \rightarrow +\infty}\left(e^{-ct} e^{c \frac{t}{2}}\right) \\ &= o_{t \rightarrow +\infty}\left(e^{-c \frac{t}{2}}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, en posant $\alpha = \frac{c}{2} > 0$, on a $\|e^{tA}\| = o_{t \rightarrow +\infty}(e^{-\alpha t})$. Il existe donc $K > 0$ tel que :

$$\forall t \geq 0 \quad \|e^{tA}\| \leq K e^{-\alpha t}.$$

□

Théorème 2. Équation de SYLVESTER.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont de parties réelles strictement négatives.

Alors, pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'équation matricielle (E) $AX + XB = C$ admet une unique solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par :

$$X = - \int_0^{+\infty} e^{tA} C e^{tB} dt.$$

PREUVE : Raisonnons par étapes.

★ ÉTAPE 1 : Montrons que le problème de CAUCHY (C) suivant a une unique solution, qu'on va expliciter :

$$\begin{cases} Y' = AY + YB \\ Y(0) = C \end{cases}.$$

(C) est une équation différentielle linéaire à coefficients constants. D'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ, elle possède une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Soit $Y : t \mapsto e^{tA} C e^{tB}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit de fonctions dérivables. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} Y'(t) &= A e^{tA} C e^{tB} + e^{tA} C B e^{tB} \\ &= AY(t) + e^{tA} C e^{tB} B \\ &= AY(t) + Y(t)B, \end{aligned}$$

puisque e^{tB} et B commutent. On a de plus $Y(0) = C$.

Donc Y est l'unique solution de (C).

★ ÉTAPE 2 : Montrons l'existence d'une solution de (E). On intègre (C) entre 0 et $t \geq 0$:

$$Y(t) - C = A \int_0^t Y(s) ds + \int_0^t Y(s) B ds. \quad (1)$$

Par hypothèse sur les valeurs propres de A et B , d'après le lemme précédent, il existe $K > 0$ et $\alpha > 0$ tels que, pour tout $t \geq 0$, on a $\|e^{tA}\| \leq K e^{-\alpha t}$ et $\|e^{tB}\| \leq K e^{-\alpha t}$.

Remarque 3.

En fait, on devrait avoir des constantes K_A, K_B, α_A et α_B , mais on prend $K = \max(K_A, K_B)$ et $\alpha = \min(\alpha_A, \alpha_B)$ (ce qui est possible puisque $t \geq 0$).

Par conséquent, pour tout $t \geq 0$, en repartant de l'expression $Y(t) = e^{tA} C e^{tB}$ trouvée dans l'ÉTAPE 1 :

$$\begin{aligned} \|Y(t)\| &\leq \|e^{tA}\| \|C\| \|e^{tB}\| \\ &\leq K^2 \|C\| e^{-2\alpha t}. \end{aligned}$$

Par comparaison de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} Y(s) ds$ converge absolument, donc converge, et $\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = 0$. En faisant tendre t vers $+\infty$ dans (1), on obtient :

$$-C = AX + XB,$$

avec $X = \int_0^{+\infty} e^{tA} C e^{tB} dt$, ce qui achève la preuve de l'existence et donne la valeur de X attendue.

★ ÉTAPE 3 : Montrons l'unicité.

Soit $\varphi : X \mapsto AX + XB$ un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après l'ÉTAPE 2, φ est surjective.

φ est donc un endomorphisme surjectif d'un espace vectoriel de dimension finie. Elle est donc injective.

On a donc bien l'unicité. □

Remarque 4.

Selon la leçon dans laquelle on recase ce développement, il faut bien sûr mettre l'accent sur d'autres choses. Par exemple, pour les leçons 154 et 208, il faudra mettre l'accent sur le lemme (donc à mettre en "proposition"), et le théorème sur l'équation de SYLVESTER devra apparaître en tant que corollaire par exemple.